Primjeri

Lokalni extremum

1. Naći extremume f-je $z=3x^2y-x^3-y^4$

Rješenje ~~Ne postoje~~ Naćimo parcijalne izvode f-je:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=6xy-3x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=3x^2-4y^3$$

Ne postoje tačke u kojima parcijalni izvodi ne postoje. Tražimo stacionarne tačke f-je rješavajući sistem:

$$\begin{cases} 6xy-3x^2=0 \\ 3x^2-4y^3=0 \end{cases}$$

Jasno je da je tačka $M_1(0,0)$ rješenje sistema.

$$\begin{cases} 3x(2y-x)=0 \\ 3x^2-4y^3=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2y=x}$$ zamijenimo u drugu jednačinu.

Dobijamo $3\cdot(4y^2)-4y^3=0 \Rightarrow 4y^2(3-y)=0$

$\Rightarrow \boxed{y=3}$ $\boxed{x=6}$ $M_2(6,3)$ je takođe stacionarna tačka.

Tražimo druge parcijalne izvode naše f-je:

$z''_{xx}=6y-6x$

$z'_{xy}=6x$

$z''_{yy}=-12y^2$

U tački $M_2(6,3)$

$z''_{xx}=-18$

$z''_{xy}=36$

$z''_{yy}=-108$

Pošto je $z''_{xx} = -18 < 0$, a

$$z''_{xx}\cdot z''_{yy} - {z''_{xy}}^2 \Big|_{M_2(6,3)} = (-18)\cdot(-108) - 36^2 = 648 > 0$$

Radi se o lokalnom maksimumu fje z u tački $M_2(6,3)$

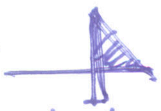
$$z_{max} = z(6,3) = 3\cdot 6^2\cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$$

$z_{max} = 27$

U tački $M_1(0,0)$ $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 0$.
Potrebno nam je dodatno ispitivanje.

$$z\Big|_{M_1(0,0)} = z(0,0) = 0.$$

Primijetimo da je za $x=0$, $z=-y^4<0$, $y\neq 0$, a za $y=0$ i $x<0$ $z=-x^3>0$. Znači, da u okolini tačke $M_1(0,0)$ funkcija $z=z(x,y)$ uzima i pozitivne i negativne vrijednosti.
Slijedi, da u tački $M_1(0,0)$ fja z nema ekstremum.



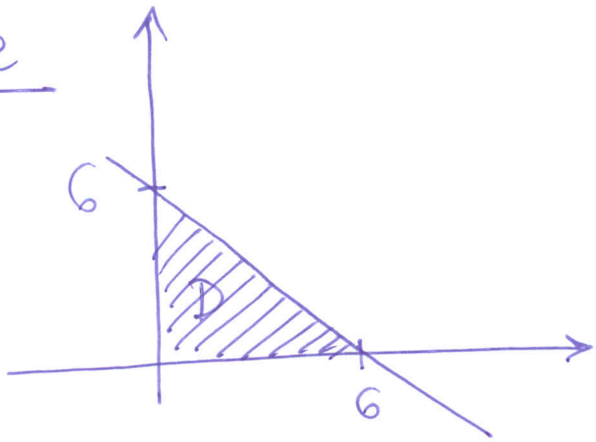
Ovaj zadatak smo također rješavali pomoću Hesseove matrice ranije.

Apsolutni extremum

Primjer: Naći najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = z(x,y) = x^2 y\,(2-x-y)$ na trouglu ograničenom pravima $x=0$, $y=0$ i $x+y=6$.

Rješenje

$$z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$$



Prvo ćemo naći stacionarne tačke koje leže unutar trougla.

$$\begin{cases} z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(4-3x-2y) = 0 \\ z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2-x-2y) = 0 \end{cases}$$

Odavde, pošto je u trouglu $x>0$ i $y>0$ imamo sistem

$$\begin{cases} 4-3x-2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases}$$

Oduzmimo od prve jednačine drugu. Tada je

$$2-2x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Iz druge jednačine $\boxed{y=\frac{1}{2}}$

Stacionarna tačka je $M_1(1, \frac{1}{2})$ koja leži unutar trougla i $\boxed{z(M_1) = \frac{1}{4}}$

Na stranicama trougla $x=0$, $y=0$ imamo da je $z \equiv 0$.

Ostaje da nađemo najveću i najmanju vrijednost funkcije z na stranici $x+y=6$ trougla.

Na toj stranici je $y = 6-x$, $x \in [0,6]$.

Kada to uvrstimo u fju, dobijamo fju jedne promjenljive:

$$z(x) = x^2(6-x)(2-x-6+x) = -4x^2(6-x) =$$
$$= 4x^3 - 24x^2, \quad x \in [0,6]$$

~~z~~ Na krajevima intervala $[0,6]$ vrijednost funkcije je $z(0) = z(6) = 0$.

Nađimo stacionarnu tacku fje jedne promjenljive z na intervalu $(0,6)$.

$$z'_x = 12x^2 - 48x = 0$$

Odavde je $12x(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ i $x_2 = 4$

$x_1 = 0$ je granična tacka intervala $(0,6)$, a $x=4$ je unutrašnja tacka.

$z(4) = -128$.

Na taj način, apsolutni ekstremum fje z na zadatoj oblasti su

$$z_{max} = z(1, 1/2) = \frac{1}{4}$$

$$z_{min} = z(4,2) = -128$$

Tacka $(4,2)$ se nalazi na pravoj $x+y=6$. 

Uslovni ekstremum

Primjer 1. Naći ekstremum funkcije

$z = x^2+y^2-12x+16y$ uz uslov $x^2+y^2=25$.

Rješenje Formirajmo Lagranžovu fju:

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

Nađimo stacionarne tačke Lagranžove fje:

$$L'_x = 2x-12+2\lambda x = 0$$

$$L'_y = 2y+16+2\lambda y = 0$$

$$L'_\lambda = x^2+y^2-25 = 0$$

Iz prve jednačine imamo da je:

$$(1+\lambda)x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{1+\lambda}$$

Iz druge jednačine:

$$(1+\lambda)y = -8 \Rightarrow y = \frac{-8}{1+\lambda}$$

Zamijenimo izraze za x i y u uslov:

$$\frac{36}{(1+\lambda)^2}+\frac{64}{(1+\lambda)^2} = 25,$$ odnosno

$$(1+\lambda)^2 = 4 \quad \text{tj} \quad |1+\lambda| = 2$$

I slučaj $1+\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

Onda je $x = 3$, $y = -4$

stacionarna tačka je $(3,-4;1)$

Nađimo Heseovu matricu Lagranžove fje za $\lambda = 1$:

$L''_{xx} = 4$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = 4$. Pošto je

$$\begin{pmatrix} -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = 400 > 0$$

Znači, tačka $M_1(3,-4)$ je tačka lokalnog uslovnog minimuma.

<u>II slučaj</u> $\quad 1 + \lambda = -2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$

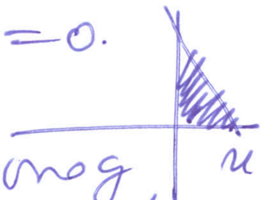
Onda je $x = -3$, $y = 4$ $\quad M_2(-3,4)$ $\underline{\lambda = -3}$ je stacionarna tačka.

$L''_{xx}\big|_{M_2} = -4$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{yy} = -4$

Pošto je $F'_x\big|_{M_2} = -6$, a $F'_y\big|_{M_2} = 8$ onda je

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -400 < 0$$

Znači, tačka $M_2(-3,4)$ je tačka lokalnog uslovnog maksimuma fje $z = z(x,y)$ uz uslov $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$.



Mogli smo umjesto ovog uslova, da tražimo diferencijal drugog reda fje $L(x,y;\lambda)$. Pogledajmo kako to izgleda za tačku $M_1(3,-4)$.

$$d^2L(x,y;1)\big|_{M_1} = 4dx^2 + 4dy^2 > 0, \quad |dx| + |dy| \neq 0$$

Znači $(3,-4)$ je tačka lokalnog uslovnog minimuma

Primjer 2 Nađi ekstremume fje $z = xy$ uz uslov $x^2+y^2=2a^2$.

Rješenje Formirajmo Lagranžovu fju:

$$L(x,y;\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-2a^2)$$

Nađimo njene stacionarne tačke:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \\ L'_y = x + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \\ L'_\lambda = x^2+y^2-2a^2 = 0 \end{cases}$$

$y = -2\lambda x$ zamijenimo u drugu jedn:

$x + 2\lambda(-2\lambda x) = 0$

$x(1-4\lambda^2) = 0$

$x \neq 0$ iz uslova, jer ako je $x=0 \Rightarrow y=0$

Iz uslova je $2a^2=0$, što nije tačno.

$$1-4\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

I slučaj $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$y = -x$

zamijenimo u uslov $\Rightarrow 2x^2 = 2a^2 \Rightarrow x^2 = a^2$

$x_1 = a, \quad x_2 = -a$

$y_1 = -a, \quad y_2 = a$

$\Rightarrow$ stacionarne tačke su $M_1(a,-a;\frac{1}{2})$ $M_2(-a,a;\frac{1}{2})$

II slučaj $\lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x$

$2x^2 = 2a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow$ $x_1 = a$ $y_1 = a$; $x_2 = -a$, $y_2 = -a$

stacionarne tačke su

$M_3(a,a;-\frac{1}{2})$, $M_4(-a,-a;-\frac{1}{2})$

Izraz

$$\begin{pmatrix} F'_y & -F'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_y \\ -F'_x \end{pmatrix}$$ je jednak

u tački $M_1(a,-a)$ $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} -2a & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2a \\ -2a \end{pmatrix} = 16a^2 > 0$$

Znači da je tačka $M_1(a,-a)$ pri $\lambda = \frac{1}{2}$ tačka lokalnog uslovnog minimuma fje $z = z(x,y)$ pri uslovu $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$.

Slično se dobije da je $M_2(-a,a)$ također tačka lokalnog uslovnog minimuma, a M_3 i M_4 tačke lokalnog uslovnog maksimuma.